

• TEMA 1. CÁLCULO MATRICIAL

- Definiciones y Operaciones con Matrices

• Suma $\rightarrow$ Sean $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A + B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
con entradas $a_{ij} + b_{ij}$

- Props:

I) Asociativa $\rightarrow A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$

II) Conmutativa $\rightarrow A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow A + B = B + A$

III) Elemento neutro $\rightarrow$ Existe una matriz $O_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que
 $A + O_{m \times n} = A$ para todo $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $o_{ij} = 0$

IV) Elemento inverso $\rightarrow$ Para cada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ existe $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que
 $A + B = O_{m \times n}$ $a_{ij} = -b_{ij}$

• Multiplicación por N° $\rightarrow$ Sean $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ Se define
 $\lambda A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ como la que tiene entradas λa_{ij}

• Multiplicación por Matriz $\rightarrow$ Sean $A \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$ $B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ se define
 $AB \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ con entradas $\sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$

- Props:

I) NO Conmutativa $\rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$

II) Asociativa $\rightarrow A \in M_{m \times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$
 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

• Matriz Identidad $\rightarrow$ Se define la Matriz identidad de orden n
 $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ con entradas δ_{ij} . NEUTRO

Delta de Kronecker $\rightarrow$ Se define como $\delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

- Concepto de Matriz Regular

$A \in M_n(\mathbb{R})$ es REGULAR o INVERTIBLE si existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $AB = BA = I_n$ y diremos que B es la inversa de A $B = A^{-1}$

Singular si no hay A^{-1}

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\bar{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $A \bar{A} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$

$$A \cdot \underbrace{\frac{1}{ad-bc} \cdot \bar{A}}_{A^{-1}}$$

DEF: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc$ es el determinante de A $\det(A) = |A|$

Si $\det(A) = 0$, $ad - bc = 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \rightarrow$ SINGULAR

Props: A, B son regulares. Entonces AB es regular, $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

- Transposición de Matrices

Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ con entradas a_{ij} , se define $A^t \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ con entradas a_{ji}

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$:

- A es SIMÉTRICA si $A^t = A$

- A es ANTISIMÉTRICA si $A^t = -A$

- Prop

$I) (A + B)^t = A^t + B^t$ $II) (\lambda A)^t = \lambda A^t$

$III) (AB)^t = B^t \cdot A^t$

- Determinantes

• $A \in M_{n \times n} \mathbb{R}$ es Triangular Superior si las entradas bajo la diagonal son 0

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

• Eliminación Gaussiana

- Tipo 1 $\rightarrow$ Intercambiar dos Filas $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

I) Cambio de signo del $\det(A)$

- Tipo 2 $\rightarrow$ Sumar a una Fila un múltiplo de otra

II) NO cambio si sumo un múltiplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

• Eliminación Gauss-Jordan

- Tipo 1 y Tipo 2 igual

- Tipo 3 $\rightarrow$ multiplicar por un n^o

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow 3F_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A A'
 $\det(A) = -2$ $\det(A') = 6 = 3 \cdot \det(A)$

- Rango de una Matriz

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y Filas $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{ik}$. Se dicen que esas Filas son linealmente dependientes si existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$F_{i1} = \lambda_2 F_{i2} + \dots + \lambda_k F_{ik}$$

En caso contrario, serían linealmente independientes

- Def: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ el Rango de A es el máx de Filas independientes. $\text{rg}(A)$.

- Matriz escalonada

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ es escalonada si es triangular superior y para cada Fila el 1º término no nulo queda a la derecha de la Fila anterior.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ Entonces $\text{rg}(A) < n$ si y solo si $\det(A) = 0$

- Def: $A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice ELEMENTAL si se obtiene de aplicar una transformación.

TODA MATRIZ ELEMENTAL ES REGULAR

- Prop: $A \in M_n(\mathbb{R})$ si mediante transformaciones elementales con matrices asociadas $E_1, E_2, \dots, E_n$, A se reduce a I_n , entonces A es regular y $A^{-1} = E_n \cdot E_{n-1} \cdots E_1$

- Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un S.E.L de n incógnitas y m ecuaciones es:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Una SOLUCIÓN es un conjunto de valores reales de $x_1, \dots, x_n$ para satisfacer el S.E.L.

• Tipos de soluciones:

- Compatible $\longrightarrow$ Tiene solución
 - Determinado $\longrightarrow$ 1 solución
 - Indeterminado $\longrightarrow$ + de una solución
- Incompatible $\longrightarrow$ No tiene solución

• Escritura matricial

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

Sistema es homogéneo si $b_1 = \dots = b_n = 0$

- Teorema de Rouché-Frobenius

Dado el sistema $AX = B$, la matriz ampliada es:

$$A^* = (A | B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

- Prop:

- I) $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*) \longrightarrow$ Incompatible
- II) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n \longrightarrow$ Compatible de t.
- III) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n \longrightarrow$ Compatible indef

La idea de la prueba del teorema de Rouché-Frobenius se basa en que si aplico eliminación Gauss-Jordan a un S.E.L. sus sols. NO cambian

- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ $A^* \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{array} \right) \lambda \neq 0$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \lambda \longrightarrow \text{Falso (Inc)}$

- Métodos Directos

I) Eliminación Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_2$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 2 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

$z = 0$
$x = 1$
$y = -1$

II) Regla de Cramer

Sea $AX = B$ un S.E.L. de n ecs. y n incógnitas compatible determinado. Entonces.

$$X_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

donde A_i es la matriz que se obtiene sustituyendo la columna i -ésima en A por B

TEMA 2

Operaciones Internas

$$E = \{1, \pi, \heartsuit, x\} \rightarrow \text{Conjunto}$$

$$P_{\text{ares}} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Conjunto vacío} \rightarrow \emptyset$$

DEF: Sean $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$, se define composición
 $g \circ f: E \rightarrow G$ como:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in E$$

Prop: La composición es asociativa $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

S: $f: E \rightarrow F$ se tiene $\text{id}_F \circ f = f$

donde $\text{id}_F: F \rightarrow F$ es la aplicación $\text{id}_F(x) = x, x \in F$

$$(\text{id}_F \circ f)(x) = \text{id}_F(f(x)) = f(x)$$

DEF: $f: E \rightarrow F$ se dice que $g: F \rightarrow E$ es la inversa de f si:

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \boxed{E \rightarrow E} \quad f \circ g = \text{Id}_F \quad \boxed{F \rightarrow F}$$

Prop: $f: E \rightarrow F$ tiene inversa si y solo si es biyectiva

DEF: Sean E, F conjuntos. Se define $E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$
 $\times$ se llama producto cartesiano

• **DEF:** Sea E un conjunto. Una operación interna es $*$:

$$E \times E \longrightarrow E \quad (x, y) \longrightarrow x * y$$

I) Suma n° reales

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad +((1, 2)) = 1 + 2 = 3$$

II) Producto matrices de orden n

$$M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

• **DEF:** $*$ $E \longrightarrow E$ puede ser $x, y, z \in E$

I) Asociativa $\longrightarrow x * (y * z) = (x * y) * z$

II) Conmutativa $\longrightarrow x * y = y * x$

III) Elemento neutro $\longrightarrow x * e = e * x = x \quad e \in E$

IV) Elemento inverso $\longrightarrow x * y = y * x = e$

Estructura de Grupo

• **DEF:** G conjunto y $*$ $G \times G \longrightarrow G$ $(G, *)$ es un Grupo si $*$ es asociativa, tiene neutro e inversos

Si también es conmutativa $(G, *)$ es Grupo Abeliano

El orden de $(G, *)$ es el número de elementos de G .

- Prop: $(G, *)$ El elemento neutro es único para todo $g \in G$

- Prop: $(G, *)$ El elemento inverso de $g \in G$ es único.

Dem: $g \in G$ Sean $x, y \in G$ inversos de g e (e es el neutro)

$$g * x = e \Rightarrow (y * g) * x = y \Rightarrow e * x = y \Rightarrow \boxed{x = y}$$

Enteros con módulo

Dos n° enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ son iguales en módulo m si $a-b$ es un múltiplo entero de m y se escribe $a \equiv b \pmod{m}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ siendo b el resto de la división a/m

Ej:

$$5 +_7 6 = [5+6]_7 = [11]_7 = 4$$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 17 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$$

PROP: El par $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ es un grupo abeliano

DEF: $(S_n, \circ)$ es un grupo llamado grupo de permutaciones

$$S_n = \{ \sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} : \sigma \text{ es biyectiva} \}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Elemento neutro $\rightarrow e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ Como σ es biyectiva $\exists \sigma^{-1}$

DEF: $f: (G, *) \rightarrow (H, \square)$ es (homo)formismo de grupos si para todo $g_1, g_2 \in G$

$$f(g_1 * g_2) = f(g_1) \square f(g_2)$$

Ej:

$$f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot) \quad f(x) = e^x$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

$$e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$$

PROP: Si e_G, e_H son neutros de $(G, *)$ y $(H, \square)$: $f(e_G) = e_H$

PROP: Para todo $g \in G$: $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

• **DEF:** $f: (G, *) \longrightarrow (H, \square)$ morfismo, se define:

I) Núcleo de f

$$\text{Ker } f = \{ g \in G : f(g) = e_H \}$$

II) Imagen de f

$$\text{Im } f = \{ h \in H : h = f(g), g \in G \}$$

- Prop $\text{Ker } f$ es subgrupo de G
 $\text{Im } f$ es subgrupo de H

• **DEF:** $f: (G, *) \longrightarrow (H, \square)$ es (homo)morfismo:

I) f es isomorfismo de grupos si f es biyectiva

II) Si $f: (G, *) \longrightarrow (G, *)$ se llama endomorfismo de grupos

Estructuras con Dos Operaciones Internas

• **DEF:** $(R, *, \square)$ es un anillo si:

I) $(R, *)$ es grupo abeliano

II) $\square$ es asociativo

III) $x, y, z \in R$ $x \square (y * z) = (x \square y) * (x \square z)$

• **DEF:** $(R, *, \square)$ anillo:

I) Si $\square$ es conmutativo se dice que $(R, *, \square)$ es anillo conmutativo

II) Si $\square$ tiene neutro es un anillo unitario

III) Si es conmutativo y unitario y todo $x \in R$, tiene inverso respecto de $\square$ excepto el neutro de $*$, se llama Cuerpo

- PROP: Si e es neutro de $*$, entonces $e \square x = e$

• TEMA 3: ESPACIOS VECTORIALES

- CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL



$$\vec{v} + \vec{w}$$
$$3\vec{v}, -4\vec{w}$$
$$2\vec{v} + 5\vec{w} \quad (\text{combinación lineal})$$

$$p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \text{Ej: } 3p(x) - q(x)$$

Def: $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$
 $+: V \times V \rightarrow V$
 $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$

Es espacio vectorial si:

I) $(V, +)$ es un grupo abeliano

II) $+$ y $\cdot$ son distributivas entre sí: $\vec{v}, \vec{w} \in V \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w} \quad \text{y} \quad (\lambda + \mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}$$

III) $(\mu \lambda) \vec{v} = \mu \cdot (\lambda \vec{v})$

IV) $1 \in \mathbb{R} \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \text{para todo } \vec{v} \in V$

• DEF: $(V, +, \cdot)$ e.v. Dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

Una combinación lineal es: $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i = V$

- Subespacios Vectoriales

• DEF: $(V, +, \cdot)$ e.v., $U \subseteq V$ es subespacio vectorial si: $(U, +, \cdot)$ es e.v.

- PROP: $U \subseteq V$, $\vec{0} \in U$ ($\vec{v} \in U$, $0\vec{v} = \vec{0} \in U$)

- PROP: U es e.v. si y solo si: $\vec{v}, \vec{w} \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in U$

- PROP: $\{U_i\}$ una colección de subespacios. Entonces $\bigcap U_i$ es subespacio vec.

- **DEF:** $(V, +, \cdot)$ e.v. y $S \subset V$ un subconjunto no vacío que no es necesariamente un subespacio vectorial. Se define envolvente lineal de S , $\langle S \rangle$, $\text{lin } S$ o $\text{span } S$, como el menor subespacio de V que contiene a S

$$\langle S \rangle = \bigwedge_{U \subset V} U \quad S \subset \langle S \rangle$$

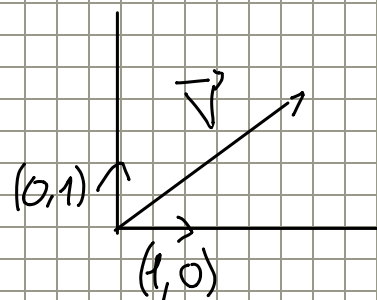
• **PROP:** $\langle S \rangle = \{ \vec{v} \in V : \vec{v} = \lambda_1 \vec{s}_1 + \dots + \lambda_k \vec{s}_k \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$

- **DEF:** $(V, +, \cdot)$ e.v. y $U_1, U_2 \subset V$, dos subespacios vect. Se define Subespacio vectorial suma $U_1 + U_2$ como

$$U_1 + U_2 = \{ \vec{v} \in V : \vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2 \}$$

Bases de un Espacio Vectorial

$$(\mathbb{R}^2, +, \cdot) \quad B = \{ (1, 0), (0, 1) \}$$



$$\vec{v} = (x, y) \\ = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$$

- **DEF:** $(V, +, \cdot)$ e.v. $S \subset V$ es sistema generador si $\langle S \rangle = V$

- **DEF:** Los vectores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ son linealmente dependientes si

$$\vec{v}_1 = \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

- **DEF:** $S \subset V$ se llama sistema libre si cualquier subconjunto finito de S está formado por vectores independientes.

I) $\vec{v}, \vec{w} \in V$ dependientes si $\vec{v} = \lambda \vec{w}, \lambda \in \mathbb{R}$

II) $\vec{0} \in S, S$ nunca es sistema libre

- PROP: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ son dependientes lineales si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$

- PROP Si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\}$ es sistema libre y $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_s\}$ sistema generador, entonces $r \leq s$

• DEF: $B \subset V$ es base si es sistema generador y sistema libre.

- PROP: Si existe una base B finita, todas las bases tienen el mismo número de elementos.

• DEF: $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ son linealmente dependientes si al menos uno se escribe como CL (comb lin) de los otros

• DEF: Si existe base finita con n elementos, la dimensión de V es $\dim V = n$. En caso contrario, $\dim V = \infty$

- PROP: Sea e.v. con $\dim V = n$

I) Todo sist libre tiene $\leq n$ vectores

II) Todo sist. generador tiene $\geq n$ vectores

- PROP: Sea e.v. $\dim V = n$. Si $S \subset V$ con n vectores y es sist libre, entonces S es base

• DEF: e.v. y $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Las coordenadas de $\vec{v} \in V$ en B son $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ donde $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$

- PROP: Las coords de un vector son únicas

- PROP: $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ $\bar{B} = \{\vec{\bar{e}}_1, \dots, \vec{\bar{e}}_n\}$

$$\vec{\bar{e}}_1 = p_{11} \vec{e}_1 + \dots + p_{n1} \vec{e}_n$$

$\vdots$

$$\vec{\bar{e}}_n = p_{1n} \vec{e}_1 + \dots + p_{nn} \vec{e}_n$$

$P = (p_{ij})$ es la matriz de cambio de base de $\bar{B}$ en B

- Prop: $(V, +, \cdot)$ e.v. de dim finita. Si U_1, U_2 son subespacios vectoriales con sistemas generadores S_1 y S_2 , entonces el subespacio $U_1 + U_2$ está generado por $S_1 \cup S_2$

- Prop: (FÓRMULA GRASSMANN) V e.v. de dim finita. Si U_1, U_2 son subespacios vectoriales con sistemas generadores, entonces:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

• DEF: $(V, +, \cdot)$ e.v. Se dice que dos subespacios U_1 y U_2 están en suma directa si: $U_1 + U_2 = V$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Entonces se escribe $U_1 \oplus U_2 = V$

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$$

- Aplicaciones Lineales

• DEF: $(V, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ ev y $f: V \rightarrow W$ aplicación f es lineal si:

I) $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

II) $f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$

• PROP: $f: V \rightarrow W$ lineal, entonces $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

• PROP: $f: V \rightarrow W$ lineal. Si: $U \subset V$ es subespacio vectorial $f(U) \subset W$ también es subespacio vectorial

• PROP: $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal. V y W dim finita. Sean $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ base de V y $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in W$. Entonces, f está unívocamente determinada por las condiciones $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$

• PROP: $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal:

I) $U \subset V$ subespacio:

$$f(U) = \{ \vec{w} \in W : \vec{w} = f(\vec{v}), \vec{v} \in U \} \text{ también es subespacio.}$$

II) $X \subset W$ subespacio:

$$f^{-1}(X) = \{ \vec{v} \in V : f(\vec{v}) \in X \} \text{ también es subespacio.}$$

• DEF: $f: V \rightarrow W$ lineal

I) EL NÚCLEO de f es:

$$\text{Ker } f = \{ \vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{0}_W \}$$

II) La IMAGEN de f es:

$$\text{Im } f = \{ \vec{w} \in W : \vec{w} = f(\vec{v}), \vec{v} \in V \} = f(V)$$

$$\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

• **PROP:** $\text{Ker } f$, $\text{im } f$ son subespacios vectoriales

DEM:

$$\text{im } f = f(V)$$

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{\vec{0}_W\}) \quad \square$$

- **Ej** $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f((x, y, z)) = (x+y, y+z, x-z)$$

¿ $\text{Ker } f$?

$$\vec{v} = (x, y, z) \in \text{Ker } f \iff f(\vec{v}) = (0, 0, 0)$$

$$f(\vec{v}) = (x+y, y+z, x-z) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow J_1 \\ \rightarrow J_2 \\ \rightarrow J_3 \end{matrix}$$

* $J_3 = J_1 - J_2$; entonces:
 $\text{rg}(A) = 2$

* Como J_3 es dependiente, se elimina:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$$

$\dim \mathbb{R}^3$

n° de ecuaciones
independientes

$$B_{\text{Ker } f} = \{1, -1, 1\} \rightarrow x=1, y=-1, z=1$$

Gracias Greviz

- PROP: $f: V \rightarrow W$ lineal:

V dim finita. Entonces:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

Ej: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \dim \underset{1}{\ker f} + \dim \underset{\hat{x} (=2)}{\operatorname{im} f}$$

(* resuelto antes) (* $3 = 1 + x$
 $x = 2$)

- PROP: Sea $f: V \rightarrow W$ lineal, f es inyectiva si y solo si $\ker f = \{\vec{0}_V\}$. Si f lineal $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

• DEF $f: V \rightarrow W$ apl. lineal f se llama isomorfismo si es bijectiva. V y W son isomorfos.

- PROP: V y W esp. vects. de dim finita son isomorfos si y solo si $\dim V = \dim W$

$f: V \rightarrow W$ aplicación lineal $\dim V = \dim W = 2$. $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$
 $B_W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$

$$f(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{w}_1 + a_{21} \vec{w}_2$$

$$f(\vec{v}_2) = a_{12} \vec{w}_1 + a_{22} \vec{w}_2$$

En general, $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= f(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \cdot (a_{11} \vec{w}_1 + a_{21} \vec{w}_2) + \lambda_2 \cdot (a_{12} \vec{w}_1 + a_{22} \vec{w}_2) \\ &= (a_{11} \lambda_1 + a_{12} \lambda_2) \cdot \vec{w}_1 + (a_{21} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2) \cdot \vec{w}_2 = \boxed{y_1 \vec{w}_1 + y_2 \vec{w}_2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \right\} \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\vec{w} = f(\vec{v})$

DEF: $(V, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ EV $\implies f: V \rightarrow W$ aplicación lineal.
 Fijadas B_V de V y B_W de W , la matriz de f en las bases B_V y B_W es la matriz que se obtiene colocando ordenadamente por columnas las coordenadas de los elementos de B_V con respecto a B_W .

$$A_{f|B_V B_W} = \begin{pmatrix} \text{coordenadas de } 1^{\text{er}} B_V & \text{coordenadas de } 2^{\text{o}} B_V & \text{coordenadas de } 3^{\text{er}} B_V \end{pmatrix}$$

PROP: $f: V \rightarrow W$ apl lineal B_V, B_W bases de V y W (dim finita)

I) $\dim \ker f = \dim V - \text{rg}(A_{f|B_V B_W})$

II) $\dim \text{im } f = \text{rg}(A_{f|B_V B_W})$

PROP: $f: V \rightarrow W$ apl lineal con dim finita es isomorfo si y solo si $A_{f|B_V B_W}$ es regular. □

$f: V \rightarrow V$ endomorfismo

Base B en Dom y $\text{codo} \rightarrow A_f$

Base $\overline{B}$ en Dom y $\text{codo} \rightarrow \overline{A_f}$

PROP $f: V \rightarrow V$ endomorfismo: Siendo $\overline{B}, B$ dos bases de V

$$A_{f|\overline{B}\overline{B}} = P_{\overline{B} \rightarrow B}^{-1} \cdot A_{f|B B} \cdot P_{B \rightarrow \overline{B}}$$

• TEMA 4 DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES.

• DEF $f: V \rightarrow V$ aplicación lineal.

I) $v \in V$, $\vec{v} = \vec{0}_V$ es autovector de f si: $f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$

II) λ se llama autovvalor asociado a $\vec{v}$

($\vec{0}$ es autovector de cualquier autovvalor de f)

- Autovvalores y Autovectores

Ej: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ endomorfismo $f(x, y) = (x+y, x-y)$

$$\vec{v} = (1, -1) \quad f((1, -1)) = (2, -2) = 2 \cdot (1, -1)$$

$\downarrow$ autovvalor $\downarrow$ autovector

- PROP: $f: V \rightarrow W$ endomorfismo y sea λ un autovvalor de f

$$U_\lambda = \{ \vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v} \}$$

U_λ se llama subespacio propio asociado al autovvalor de λ

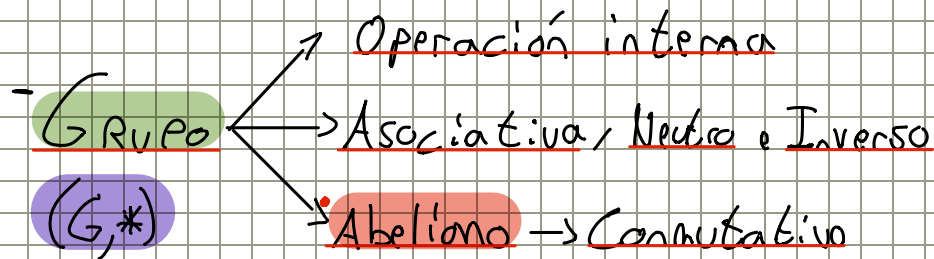
- PROP: $f: V \rightarrow W$ endomorfismo y $\dim V$ finita.

$\lambda \in \mathbb{R}$ es autovvalor de f si y solo si: $\det(A_f - \lambda I_n) = 0$ *

A_f es la matriz en alguna base

* se llama Ecuación Característica de f

- PROP: $f: V \rightarrow V$ endomorfismo y $\dim V$ finita, f diagonalizable si y solo si existe una bace de V formada por autovectores



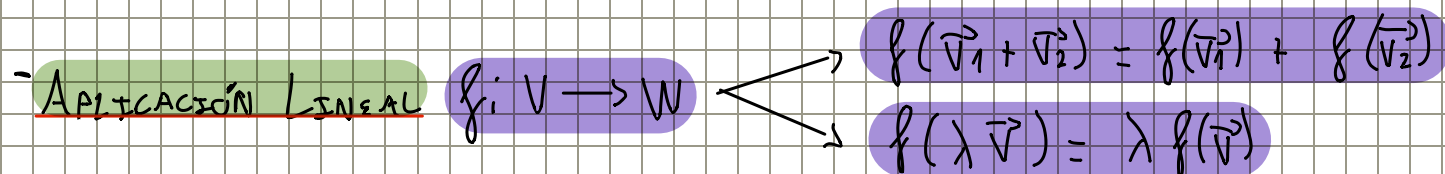
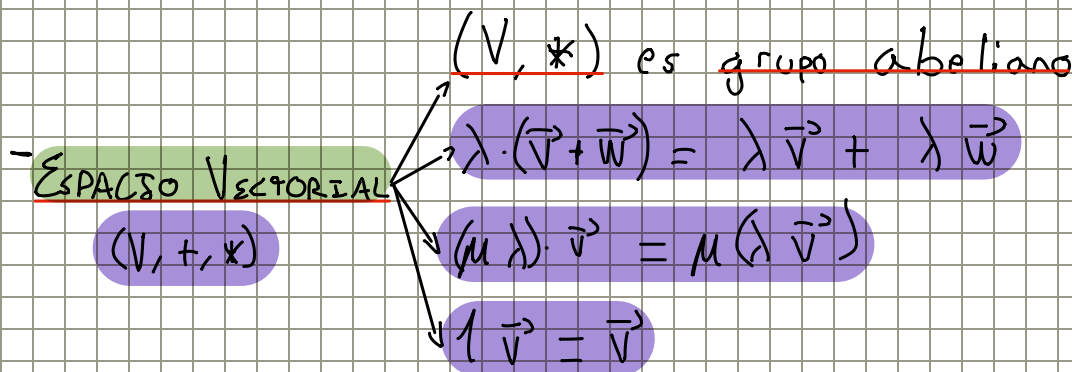
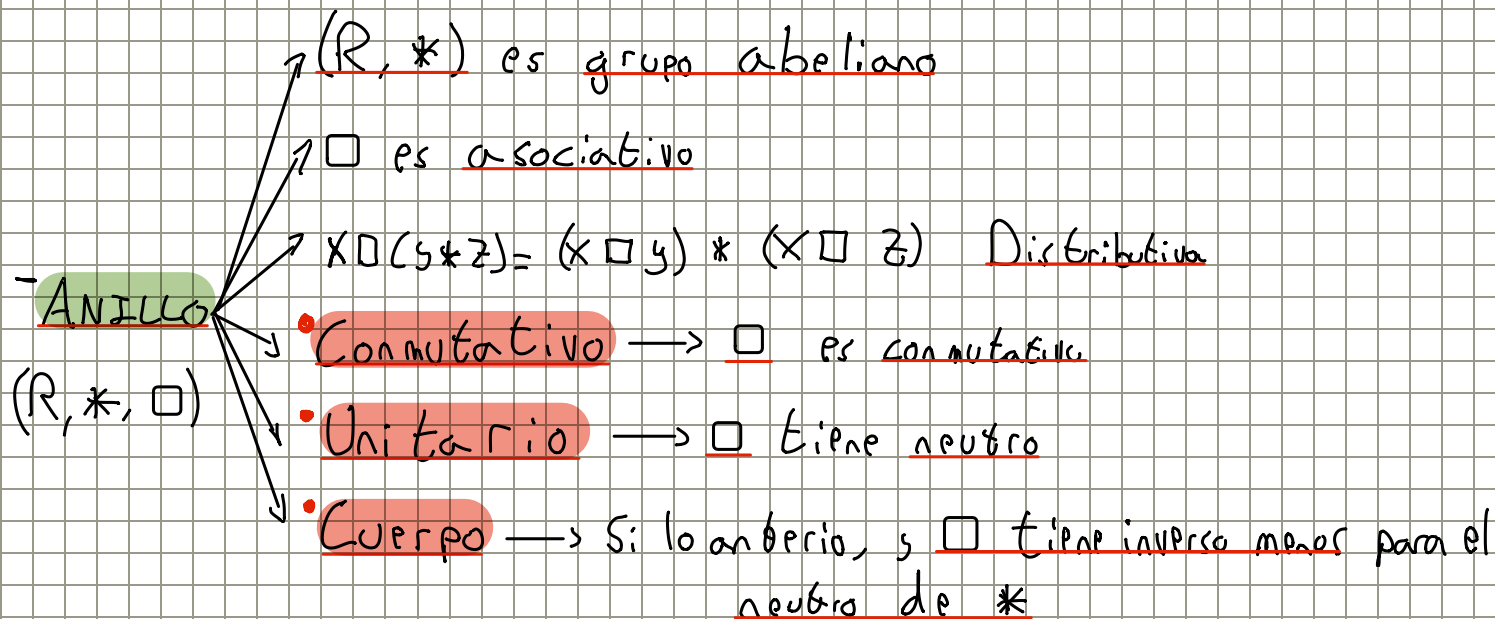
- Un solo neutro para todo $g \in G$
- Un inverso para cada $g \in G$

Dem: $g \in G$ Sean $x, y \in G$ inversos de g e (es el neutro)
 $g * x = e \Rightarrow (g * g) * x = y \Rightarrow e * x = y \Rightarrow x = y$

- HOMOMORFISMO $f: (G, *) \longrightarrow (H, \square) \longrightarrow f(g_1 * g_2) = f(g_1) \square f(g_2)$

• Núcleo de f $\rightarrow \text{Ker } f = \{g \in G : f(g) = e_H\}$

• Imagen de f $\rightarrow \text{im } f = \{h \in H : h = f(g), g \in G\}$



• Núcleo de f $\rightarrow \text{Ker } f = \{g \in G : f(g) = e_H\}$

• Imagen de f $\rightarrow \text{im } f = \{h \in H : h = f(g), g \in G\}$

$$\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{im } f$$